EXTENSÃO INTERVALAR DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS UNIFORME, EXPONENCIAL E PARETO EM TEMPO LINEAR

FINGER, Alice Fonseca[1]; LORETO, Aline Brum[2]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – affinger@inf.ufpel.edu.br*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – aline.loreto@inf.ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Os intervalos foram definidos com o objetivo inicial de automatizar a análise do erro computacional. Através da utilização de intervalos, tem-se um controle automático de erros com limites confiáveis, além de provas de existência ou não de solução de diversos problemas. Considerando que o controle do erro numérico é feito através do uso de intervalos ao invés de números reais, Kulisch e Miranker (1981) propuseram que a implementação da aritmética intervalar seja realizada através da chamada aritmética de exatidão máxima, o que significa a busca para que resultados numéricos ou sejam um número de ponto flutuante ou estejam entre dois números de ponto flutuantes consecutivos.

Por conveniência matemática, é importante associar números para cada resultado possível de um experimento aleatório, o que é feito com a definição de variáveis ou vetores aleatórios (FELLER, 1968; JAMES, 2006; MEYER, 1983). No estudo das variáveis aleatórias contínuas sobre o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, um dos problemas é o cálculo de probabilidades, visto que é necessário resolver uma integral definida da função densidade que, na maioria das vezes, não possui primitiva explícita ou cuja primitiva não é simples de se obter. Embora integrais de funções densidade de probabilidade como a Uniforme, a Exponencial e a de Pareto, sejam resolvidas analiticamente, seu valor numérico é dado por aproximação, e portanto afetado por erros de arredondamento ou truncamento.

O termo complexidade, no contexto de algoritmos, refere-se aos recursos necessários para que um algoritmo possa resolver um problema sob o ponto de vista computacional, ou seja, à quantidade de trabalho despendido pelo algoritmo (TOSCANI; VELOSO, 2001). Quando o recurso é o tempo, são escolhidas uma ou mais operações fundamentais e então são contados os números de execuções desta operação fundamental na execução do algoritmo.

A complexidade também pode ser vista como uma propriedade do problema, o que significa dar uma medida independente do tratamento dado ao problema, independente do caminho percorrido na busca da solução, portanto independente de algoritmos. Alguns problemas são bem comportados, isto é, permitem chegar a limites de complexidades bem definidos, outros estão em classes com contornos não bem claros (TOSCANI; VELOSO, 2001).

O objetivo deste trabalho é realizar a análise da complexidade computacional dos problemas de computar intervalos encapsuladores para as variáveis aleatórias Uniforme, Exponencial e Pareto. Para tanto são analisados métodos e algoritmos intervalares (VARJÃO, 2011), baseados na matemática intervalar (MOORE, 1979) e na aritmética de exatidão máxima (KULISCH; MIRANKER, 1981), que encapsulem probabilidades para as variáveis aleatórias Uniforme, Exponencial e Pareto. Para a Exponencial, o método proposto fundamenta-se em Caprani et al. (2002). Para as variáveis Uniforme e Pareto o intervalo encapsulador foi definido a partir da função densidade. A escolha das variáveis relaciona-se com questões de avaliação de desempenho.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Em probabilidade, a computação dos valores das variáveis contínuas Uniforme, Exponencial e Pareto considera nas suas fórmulas *n* variáveis reais x_i com *n* entradas reais. Ou seja, realiza-se o processamento de dados aplicando operações aritméticas reais (+; -; *; /) sobre os dados de entrada para obter os valores destas distribuições.

Neste trabalho, considera-se como domínio dos problemas de computar os intervalos encapsuladores para as variáveis aleatórias Uniforme, Exponencial e Pareto, um conjunto de valores intervalares, ou seja, *Dom(f)* = $\mathrm{I}\mathbb{R}^n$ (*n* é o número de argumentos da função). Ressalta-se que, quando se altera a definição do domínio (dados de entrada) de um problema, define-se um novo problema (LORETO, 2006).

Os problemas de computar os intervalos encapsuladores para as variáveis aleatórias Uniforme, Exponencial e Pareto é um problema de localização associado ao problema de decisão, pois se deseja saber se os intervalos encapsuladores contêm as soluções reais para estes problemas.

Em (SANTOS, 2010) e (VARJÃO, 2011) encontram-se as extensões intervalares definidas para as variáveis aleatórias Uniforme, Exponencial e Pareto. Estas extensões foram propostas considerando que no estudo das variáveis aleatórias contínuas sobre o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, um dos problemas é o cálculo de probabilidades, onde se deve resolver uma integral definida da função densidade que não possui primitiva explícita ou cuja primitiva não é simples de se obter.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A realização da análise da complexidade considera os algoritmos intervalares desenvolvidos por Varjão (2011), para o cálculo de intervalos encapsuladres para as variáveis aleatórias Uniforme, Exponencial e Pareto. Estes algoritmos utilizam aritmética intervalar definida por Moore (1966) e a extensão intervalar (MOORE, 1979) como método da computação intervalar.

A partir da investigação da ordem de complexidade dos algoritmos propostos para soluções dos problemas baseados em computar os intervalos encapsuladores das variáveis aleatórias, realiza-se a classificação destes quanto à classe de complexidade.

A Tabela 1 apresenta a ordem e a classe de complexidade que os problemas de computar os intervalos encapsuladores para as variáveis aleatórias Uniforme, Exponencial e Pareto pertencem.

Tabela 1: Variáveis aleatórias uniforme, exponencial e pareto e complexidade dos problemas dos intervalos encapsuladores.

Variáveis Aleatórias	Ordem de Complexidade	Classe de Complexidade
Uniforme	*O(n)*	P
Exponencial	*O(n)*	P
Pareto	*O(1)*	P

Verifica-se que os problemas de computar os intervalos encapsuladores para as variáveis aleatórias Uniforme, Exponencial e Pareto, pertencem à classe de problemas P, ou seja, as soluções (através da extensão intervalar) para estes problemas possuem algoritmos intervalares de tempo linear. Os resultados obtidos na análise da complexidade ratificam a viabilidade da computação dos intervalos encapsuladores para as respectivas variáveis.

4. CONCLUSÕES

No estudo das variáveis aleatórias sobre o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, um dos problemas é o cálculo de probabilidades, visto que é necessário resolver uma integral definida da função densidade que, na maioria das vezes, não possui primitiva explícita ou cuja primitiva não é simples de se obter. Embora integrais de funções densidade de probabilidade como a Uniforme, a Exponencial e a de Pareto, sejam resolvidas analiticamente, seu valor numérico no computador é dado por aproximação, e, portanto, afetado por erros de arredondamento ou truncamento.

Para as variáveis Uniforme e Pareto o intervalo encapsulador foi definido a partir da função densidade e para a variável Exponencial o método proposto fundamenta-se na aplicação do método de Simpson Intervalar.

O objetivo deste trabalho foi mostrar a importância e justificativa de se utilizar a matemática intervalar no cálculo de intervalos encapsuladores para as variáveis aleatórias Uniforme, Exponencial e Pareto. A partir do desenvolvimento dos métodos e algoritmos para encontrar intervalos, baseados na matemática intervalar e na aritmética de exatidão máxima que encapsulassem probabilidades reais para as variáveis aleatórias realizou-se uma análise de complexidade de cada algoritmo para justificar seu uso.

Ao analisar a complexidade de um problema pode-se informar qual a classe de complexidade que o mesmo pertence. Conhecendo a classe em que o problema pertence, os projetistas de algoritmos, e até mesmo profissionais da área de estatística, poderiam se concentrar naqueles problemas para os quais existem algoritmos razoáveis, ou seja, que possam ser resolvidos através do computador em tempo polinomial de processamento.

Segundo Toscani (TOSCANI; VELOSO, 2001), identificar a tratabilidade e a intratabilidade dos problemas, mesmo aqueles que possuem algoritmos imediatos (algoritmos de fácil construção), é de extrema importância para os projetistas de algoritmos, pois conhecendo as classes de complexidade em que os problemas pertencem, os projetistas poderiam ter uma medida real quanto às soluções disponíveis e a expectativa de melhorar esses resultados.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo suporte financeiro na realização do presente trabalho.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAPRANI, H. N. O. and MADSEN, K. **Introduction to interval analysis**, IMM, 2002.

FELLER, W. An **Introduction to Probability and Its Applications**, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1968.

JAMES, B. R. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**, 3rd ed., IMPA, 2006.

KULISCH, U. and MIRANKER, L. **Computer Arithmetic in Theory and Practice**, 1st ed., Academic Press, 1981.

KULISCH, U. W. (2008, apr) Complete interval arithmetic and its implementation on the computer. [Online]. Disponível em: http: //www.math.kit.edu/iwrmm/seite/preprints/media/preprintn%20nr

LORETO, Aline B. **Análise da Complexidade Computacional de Problemas de Estatística Descritiva com Entradas Intervalares.** Tese de Doutorado em PPGC, Instituto de Informática/UFRGS, Porto Alegre, 06/01/2006.

MEYER, P. L. **Probabilidade: Aplicações à Estatística**, 2nd ed., LTC, 1983.

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.

MOORE, R. E. **Methods and Applications of Interval Analysis**, 2nd ed., SIAM, 1979.

SANTOS, M. G. **Probabilidades autovalidáveis para as variáveis aleatórias exponencial, normal e uniforme.** 2010. Tese (Doutorado em Matemática Computacional) – Programa de Pós-Graduação em Matemática Computacional, Universidade Federal de Pernambuco.

TOSCANI, L. and VELOSO, P. **Complexidade de Algoritmos: análise, projetos e métodos**. Sagra-Luzzato, 2001.

VARJÃO, F. R. G. **IntPy: Computação científica auto validável em Python**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal de Pernambuco.