XVII CIC
X ENPOS
Conhecimento sem fronteiras
XVII Congresso de Iniciação Científica
X Encontro de Pós-Graduação
11, 12, 13 e 14 de novembro de 2008

LEONARDO DE PISA – FIBONACCI

SCHULZ, Lilian Mackedanz[1]; ARAÚJO, Aline Santos de[2]; FONSECA, Jociane Corrêa[3]; RODRIGUES, Lisiane Jaques[4]; SILVESTRE, Ismael Batista Maidana[5]; VIEIRA, Lisandra Bubolz[6].

[1,2,3,4,5,6] *Graduandos do Curso de Licenciatura em Matemática da UFPel. . Campus Universitário – Caixa Postal 354 – CEP 96010-900. lilianschulz.86@gmail.com, alininhasantos@gmail.com, jocianecorrea@gmail.com, lisijaques@gmail.com, silvestreismaeljb@yahoo.com.br, lisandrabubolz@yahoo.com.br*

1. INTRODUÇÃO

O seguinte artigo busca contemplar a história de um grande matemático, popularmente conhecido por Fibonacci, bem como as principais contribuições de seus estudos para a matemática. Tratar deste assunto nos leva, inquestionavelmente, a conhecida Seqüência de Fibonacci, que é um de seus principais feitos; o problema originário é trazido em seu primeiro e mais famoso livro, o *Liber Abaci*, que ainda trata muito fortemente dos numerais indo-arábicos. Além disso, podemos observar interessantes propriedades em tal seqüência, como a razão áurea, que é construída a partir dos seus termos consecutivos. Estas são algumas das questões que o seguinte texto pretende trazer para o conhecimento de alguns e estimular a curiosidade de outros.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, nasceu por volta do ano de 1170 (com indícios de 1175), em Pisa, Itália. O nome Fibonacci quer dizer filho de Bonaccio. Sabe-se que seu pai chamava-se Guilielmo Bonnacci, tendo o apelido de Bonaccio (homem de boa natureza, que se traduziu mais tarde para português como "bonachão") e que era um grande mercador, tendo uma ampla rede de negócios comerciais no norte da Costa Africana, assim, Leonardo estudou com professores muçulmanos e viajou pelo Egito, Síria e Grécia, sendo natural que conhecesse profundamente os métodos algébricos árabes, inclusive os algarismos indo-arábicos. Mais do que os algarismos, o que chamou a atenção de Fibonacci foi o sistema de numeração, os cálculos tidos com maior facilidade e sua suprema em relação aos números romanos. Deste modo, foi um dos autores que mais participou da divulgação dos numerais indo-arábicos e que ajudou a popularizar o "algorismo", como foi inicialmente conhecido. Observando estas imensas vantagens, se destinou a transmitir os numerais indo-arábicos ao povo de seu país de origem.

Após o retorno de Fibonacci à Itália, abastecido de todo conhecimento matemático adquirido durante suas viagens, é que, em 1202, foi publicado o seu primeiro livro, *Liber Abaci*, tendo sido lançada uma ligeira revisão em 1228. Agora, é importante ressaltar que este leva um título enganador, pois o tratado não fala sobre o ábaco, como o nome propõe, mas sim sobre métodos e problemas algébricos no qual se faz uso dos numerais indo-arábicos. Neste livro são descritos os novos algarismos, sendo, pela primeira vez, mencionado o zero na literatura cientifica ocidental, fazendo uso de um conceito totalmente novo que permitia o preenchimento de uma posição decimal "vazia" com o uso deste símbolo, proporcionando a utilização de sistemas numéricos posicionais, e deixando de lado a notação com algarismos romanos, empregada até então.

É ainda no *Liber Abaci* que se pode ver, de forma inédita, a Seqüência de Fibonacci e os números de Fibonacci, descobertas que mais o tornaram popular entre os matemáticos da época.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O problema do *Liber Abaci* que serviu de inspiração a futuros matemáticos e que deu origem à Seqüência de Fibonacci foi o seguinte:

"Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"

Para resolução deste, parte-se de que foi adquirido um casal de coelhos recém nascidos, que este e qualquer outro casal demora um mês exato para tornar-se fértil e poder reproduzir, que cada casal de coelhos fértil gera um casal de filhos a cada mês, aceitando-se cruzamentos consangüíneos e que jamais se pode desfazer dos coelhos, que por sua vez não morrem e permanecem sempre fechados em um certo local.

Diante disto, pergunta-se: quantos coelhos poder-se-á ter ao final de cada mês? Para responder observa-se a Figura 1 que mostra a "árvore genealógica" dos coelhos até o sétimo mês.

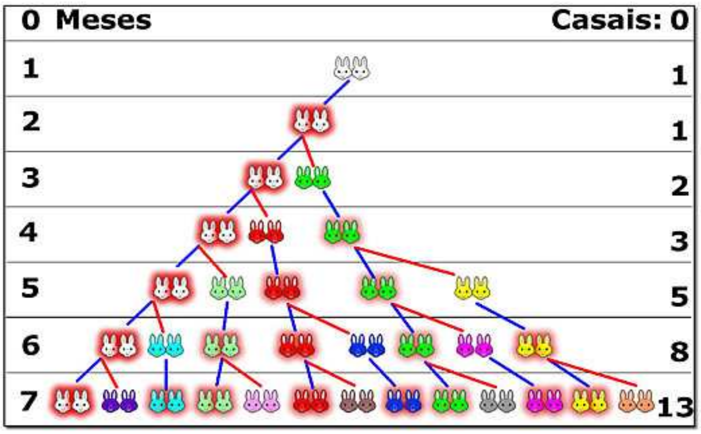

Figura 1: "árvore genealógica" até o sétimo mês

Na Figura cada casal de coelhos recém nascido (não-fértil) é representado sem qualquer adorno, mas a partir de um mês de vida, quando já pode se reproduzir é circundado com uma tonalidade vermelha. Para desenhar a árvore genealógica basta lembrar que cada casal fértil gerará um novo casal de filhos (linhas vermelhas), que poderá gerar seus descendentes a partir de um mês de vida e que os casais existentes no mês anterior passam a se repetir nos meses seguintes (linhas azuis).

Para deduzir a "lei de formação" da seqüência numérica que representa o número de casais mês a mês tome, por exemplo, o mês 5: veja que sua população (5 casais) é igual à população total do mês anterior (3 casais existentes no mês 4) somada aos recém nascidos naquele mês (2 casais nascidos no mês 5). Ainda, os casais recém nascidos em cada mês são tantos quantos são os casais férteis no mês anterior (2 casais férteis no mês 4), e o número de casais férteis no mês anterior corresponde ao número total de casais de dois meses antes (2 casais no mês 3). Logo, para se obter o número total de casais em um mês qualquer basta **somar o número de casais dos dois meses que o antecedem**.

Esse problema célebre dá origem à "Seqüência de Fibonacci": 1,1,2,3,5,8,13,21,...,f_n,..., onde $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 3$, isto é, cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois imediatamente anteriores. Esta é a primeira seqüência recursiva conhecida na literatura matemática, ou seja, uma seqüência na qual todo termo pode ser representado como uma combinação linear dos termos precedentes. Isto é, $f_1=1$, $f_2=1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 3$.

Esta seqüência possui propriedades belas e significativas, dentre elas dá-se destaque a duas, com suas respectivas demonstrações.

- <u>A Soma dos n primeiros termos da Seqüência de Fibonacci</u>: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$

Prova:

Começamos escrevendo a igualdade fundamental

$$f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$$

Daí segue que $f_k = f_{k+2} - f_{k+1}$. Agora, fazendo k=1,2,3,...,n e somando termo a termo, obtemos:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = (f_3 - f_2) + (f_4 - f_3) + (f_5 - f_4) + \ldots + (f_{n+2} - f_{n+1}) = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1$$

- <u>Razão Áurea</u>:

Considere a razão $r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, n= 1,2,3,4,..., entre os números de Fibonacci consecutivos. A seqüência r_n: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \ldots$

possui as seguintes propriedades:

(i) os termos de ordem par são decrescentes: $r_2 > r_4 > r_6 > r_8 > r_{10} > \ldots$

(ii) os termos de ordem impar são crescentes: $r_1 < r_3 < r_5 < r_7 < r_9 < \ldots$

(iii) os termos consecutivos aparecem em ordem alternada: $r_1 < r_2$, $r_2 > r_3$, $r_3 < r_4$, $r_4 > r_5$,...

(iv) a seqüência dos intervalos fechados: $[r_1, r_2]$, $[r_3, r_4]$, $[r_5, r_6]$, $[r_7, r_8]$,... é encaixante, isto é, cada um esta inteiramente contido no anterior: $[r_1, r_2] \supseteq [r_3, r_4] \supseteq [r_5, r_6] \supseteq [r_7, r_8] \supseteq \ldots$

Além disso, o limite do comprimento desses intervalos tende a zero quando n tende ao infinito.

O Lema dos Intervalos Fechados Encaixados diz que:

Se I_1, I_2, I_3,... é uma seqüência de intervalos fechados e limitados, e se o comprimento de I_n tende a zero quando n tende ao infinito, então existe um, e somente um, número real que pertence a todos os intervalos da seqüência.

No caso da seqüência de intervalos fechados definida acima, concluímos que existe um numero real L comum a todo o intervalo fechado

$$L \in [r_{2n-1}, r_{2n}], \text{ para } n = 1, 2, 3, 4,...$$

e, portanto, $L = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$

Sabendo-se que $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ e dividindo-se ambos os lados por f_{n+1} temos: $\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+1}} + \frac{f_n}{f_{n+1}}$, que resulta em: $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$

Agora, fazendo o limite quando n tende ao infinito, obtemos: $L = 1 + \frac{1}{L}$

Portanto, L é a raiz positiva da equação $L^2 = L + 1$, ou seja $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é a **razão áurea**, costumeiramente denotada por ϕ, com uma aproximação $\phi = 1{,}6180...$

4. CONCLUSÕES

Frente a partes da obra de Fibonacci, podemos ver que suas descobertas e estudos se dão em torno de uma matemática até certo ponto “pesada” para nós hoje em dia. Se compararmos aos estudos de seu tempo, percebemos que ele foi um matemático extremamente avançado, suas descobertas exigiam raciocínio lógico e capacidade de percepção, de modo que descobriu relações às vezes simples, mas não menos importantes. Filho da classe média que por motivos de seu interesse abandona sua condição para estudar uma ciência ainda em faze de estruturação. São notáveis sua capacidade e seu conhecimento em se tratando de matemática. Algumas de suas descobertas envolvem conceitos que até hoje ainda não foram solucionados. A quantidade de material disponível sobre a vida de Fibonacci é pequena, o que não nos proporciona saber mais a respeito deste, mas apesar de sabermos pouco sobre Fibonacci, temos muito a saber sobre suas contribuições.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

HUNTLEY, H. E..**A Divina proporção**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BENITO Piropo. Disponível em: <http://www.bpiropo.com.br/fpc20070108.htm>. Acesso em: 1 mai. 2008.

Notas de aula: A Seqüência de Fibonacci. Disponível em: <http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/treinamento_2004/notas_aula/nota_aula_03.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2008.