VELOCIDADE DE DIVERGÊNCIA PARA SÉRIES NUMÉRICAS

VENZKE, Cristiane Schwartz[1]; **NORNBERG, Gabrielle Saller**[2]; **BOURCHTEIN, Lioudmila**[3]

[1] *Acadêmica do 6º semestre de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas – UFPEL, bolsista de iniciação científica CNPq, crisvenzke@hotmail.com*
[2] *Acadêmica do 6º semestre de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas – UFPEL, gabillysn@hotmail.com*
[3] *Doutora, orientadora e pesquisadora do Instituto de Física e Matemática pela Universidade Federal de Pelotas – UFPEL*

1 INTRODUÇÃO

O estudo das séries, em matemática, tem grande importância, tanto no que diz respeito ao próprio desenvolvimento teórico da matemática pura, quanto no que diz respeito às aplicações deste estudo a outras áreas do conhecimento, pois as séries se desenvolvem, naturalmente, como caminhos na busca de soluções para problemas de diversas áreas, tais como física, química, biologia e computação.

Almejando obter uma visão geral sobre o estudo das séries numéricas não-negativas, analisamos vários testes que auxiliam na descoberta sobre os comportamentos destas; alguns, mais sofisticados do que os estudados durante a graduação. Neste trabalho, usamos a seguinte sequência de testes na forma sem limites: de D'Alembert, de Raabe e de Gauss.

Mostramos aplicações destes testes em algumas séries, concentrando-nos na análise da sua divergência. Com isso, apresentamos alguns exemplos de séries onde estes testes geram respostas e, outros onde eles falham. Avaliamos as somas parciais de cada série e comparamos as velocidades de divergência das mesmas, construindo o gráfico dessas somas em função do número dos termos para melhor visualização dos resultados.

2 METODOLOGIA

2.1 Testes sem limite para verificar o comportamento das séries

Seja $\sum a_n$ uma série onde $a_n \geq 0,\ \forall n \in N$, para cada teste abaixo.

2.1.1 Teste de D'Alembert (ou Teste da Razão)

Supondo que é válida a expressão $\frac{a_{n+1}}{a_n} = D_n$, temos:

Se $\exists N,\ \forall n > N:\ D_n \leq q,\ q < 1$, então a série converge.

Se $\exists N,\ \forall n > N:\ D_n \geq 1$, então a série diverge.

2.1.2 Teste de Raabe

Suponha $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\sigma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, logo:

Se $\sigma > 1$, então a série converge.

Se $\sigma < 1$, então a série diverge.

Observação: O teste de Raabe é uma generalização do teste de D'Alembert. Basta observar que $\sigma = n\left(\dfrac{1}{D_n} - 1\right) + o(1)$.

2.1.3 Teste de Gauss

Supondo que $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{\theta_n}{n^{1+\delta}}$, onde $\delta > 0$ e θ_n é limitada, garantimos que:

Se $\lambda > 1$, então a série converge; porém, se $\lambda < 1$, a série diverge.
Caso $\lambda = 1$, se $\mu > 1$, a série converge; mas, se $\mu \leq 1$, a série diverge.

Observação: O teste de Gauss é uma generalização do teste de Raabe. Basta especificar $\lambda = 1$ e $\mu = \sigma$.

2.2 Algumas aplicações dos testes em forma de exemplos

2.2.1 Estudar o comportamento da série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$.

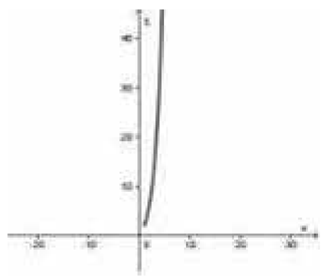
Para verificar a divergência desta série, utilizamos o Teste de D'Alembert:

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1.$$

De acordo com este teste, a série diverge.

Observamos, abaixo, o gráfico que representa as somas parciais desta série. Notamos que, como a série diverge, suas somas parciais tendem a infinito, o que é natural de esperar, pois a condição necessária para convergência, que o termo geral deve tender a zero, não é satisfeita.

Percebemos que os termos, conforme aumentam os valores de "*n*", aumentam também. Logo, não podia ser diferente: as somas desses termos, parcialmente, devem aumentar, tendendo a infinito.



2.2.2 Verificar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 4 \cdot K \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot K \cdot (2n-1)} \cdot \dfrac{1}{n}$.

Temos que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+2)n} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{2n^2 + 2n} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

Observe que

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{n+1}{2n^2+3n+1} < 1.$$

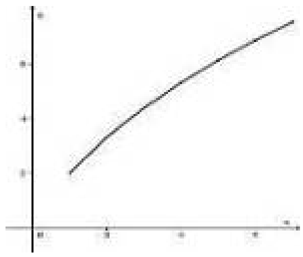
Mas $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 1$, e, portanto, não existe constante $q<1$ tal que $D_n \le q$. Assim, o teste de D'Alembert não é aplicável.

No entanto, podemos utilizar o teste mais fino, proposto por Raabe, porque

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1/2}{n}.$$

Isto é, $\sigma = \dfrac{1}{2}$ e $o\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ na formulação deste teste. Concluímos, então, que a série é divergente.

Abaixo, temos o gráfico que expõe as somas parciais da série analisada. Aqui, não é tão fácil perceber que as somas parciais tendem a infinito, pois isto se dá mais lentamente. No entanto, se analisarmos essas somas para "*n*" suficientemente grande, notaremos que elas tendem a infinito.



2.2.3 Analisar a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{p(p+1)...(p+n-1)}{n!}.\dfrac{1}{n^p}$, onde $p>0$.

Note que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)}{p+n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^p = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}\cdot\left(1+\frac{p}{n}\right)^{-1}.$$

Adequando a expressão às condições do teste de Raabe, temos

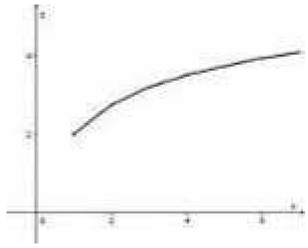
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

No entanto, obtemos que $\sigma = 1$, o que é insuficiente para determinar o comportamento da série. Porém, é possível investigar o seu comportamento pelo teste de Gauss, pois podemos ver, desta última igualdade, que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\delta}}, \text{ onde } \delta = 1 > 0,\ \lambda = 1,\ \mu = 1.$$

Com isto, concluímos que a série diverge.

Atribuindo valores específicos para "*p*", podemos construir os gráficos das somas parciais. Vemos abaixo a situação quando "*p*=2".



3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Percebemos que o estudo de testes mais sofisticados, além de possibilitar a análise de séries mais complexas, permite esclarecer a hierarquia de testes para séries não-negativas, obtendo, assim, uma visão geral sobre a investigação detalhada das séries numéricas e especificando a área de aplicabilidade de diferentes testes.

Nos exemplos trabalhados, como as séries divergem, notamos que os gráficos das suas somas parciais tendem a infinito, cada uma a seu modo. É, exatamente, este tipo de comportamento, o qual evidencia propriedades particulares, que permitirá escolher o teste mais adequado para a demonstração relativa à divergência.

4 CONCLUSÕES

De acordo com a análise feita nos exemplos, elaborados para mostrar a área da aplicabilidade dos testes, e levando em conta a experiência adquirida com as estruturas dos testes apresentados, concluímos que a velocidade da tendência ao infinito em cada série divergente, determina a necessidade de aplicação de testes mais finos. Quanto mais lenta essa tendência e, por conseguinte, menos visível aos primeiros termos, mais refinados serão os testes que designarão o seu comportamento.

5 REFERÊNCIAS

BONAR, D.D.; KHOURY, M.J.. **Real Infinite Series**. MAA, 2006.
BRESSOUD, D.. **A Radical Approach to Real Analysis**. MAA, 2006.
BROMWICH, T. J. I.. **An Introduction to the Theory of Infinite Series**. AMS, 2005.
FICHTENHOLZ, G. M.. **Infinite series: Rudiments**. Gordon and Breach Pub., 1970.
FICHTENHOLZ, G. M.. **Infinite series: Ramifications**. Gordon and Breach Pub., 1970.
GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M.. **Table of Integrals, Series, and Products**. Academic Press, 1994.
HYSLOP, J. M.. **Infinite Series**. Kessinger Pub., 2008.
KNOPP, K.. **Theory and Application of Infinite Series**. Dover Pub., 1990.
RUDIN, W.. **Principles of Mathematical Analysis**. McGraw-Hill, 1976.