

VELOCIDADE DE CONVERGÊNCIA PARA SÉRIES NUMÉRICAS

**NORNBERG, Gabrielle Saller¹; VENZKE, Cristiane Schwartz²;
BOURCHTEIN, Andrei³**

¹ Acadêmica do 6º semestre de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas – UFPEL, bolsista de iniciação científica CNPq, gabillysn@hotmail.com

² Acadêmica do 6º semestre de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas – UFPEL, crisvenzke@hotmail.com

³ Doutor, orientador e professor do Instituto de Física e Matemática pela Universidade Federal de Pelotas – UFPEL

1 INTRODUÇÃO

Séries infinitas representam um assunto atraente, visto que surgem, naturalmente, da resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento. Nas disciplinas de matemática universitária, os testes mais sofisticados são, normalmente, omitidos por falta de tempo, embora representem técnicas importantes na investigação do comportamento de séries. Além disso, a introdução de algumas das técnicas avançadas permite entender melhor a lógica da construção de testes, suas interligações e suas limitações.

Os objetos deste estudo são séries numéricas não-negativas e alguns testes para convergência colocados em ordem de complexidade: de mais simples e conhecidos até mais sofisticados e menos populares (mas, ainda, importantes). Para sistematizar a ordem de testes se utiliza a abordagem de Kummer.

Nessa apresentação, ilustramos a hierarquia analisada de testes de convergência, utilizando a cadeia dos seguintes resultados: o teste da Razão (bem conhecido), de Raabe e de Bertrand (mais finos), onde os últimos possibilitam o estudo do comportamento de várias séries, para as quais não teríamos respostas com testes mais simples. Vamos, também, mostrar a aplicação destes em alguns exemplos, e comparar a velocidade de convergência das séries analisadas.

2 METODOLOGIA

2.1 Formulações de alguns testes

Teste da Razão ou Teste de D'Alembert

Seja a série $\sum a_n$, com $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Suponha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, logo:

1) Se $D < 1$, então $\sum a_n$ converge

2) Se $D > 1$, então $\sum a_n$ diverge

Teste de Raabe

Seja $\sum a_n$, com $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Supondo $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = R$, temos:

1) Se $R > 1$, então $\sum a_n$ converge

2) Se $R < 1$, então $\sum a_n$ diverge

Observação: É simples de ver que o teste da Razão é um caso particular do teste de Raabe.

Teste de Bertrand

Seja $\sum a_n$, onde $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Supondo $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = B$,

temos:

- 1) Se $B > 1$, então $\sum a_n$ converge
- 2) Se $B < 1$, então $\sum a_n$ diverge

Observação: É fácil de provar que o teste de Raabe é um caso particular do teste de Bertrand.

2.2 Exemplos sobre os testes

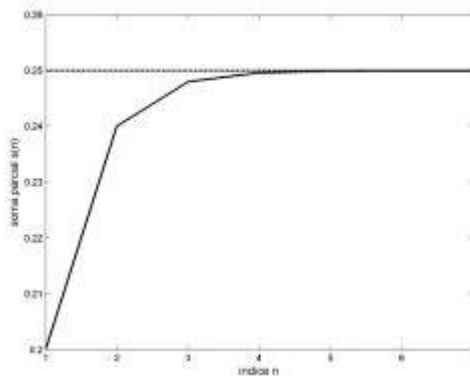
Exemplo 1: Analisar o comportamento da série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Para esta série, podemos usar o teste da Razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} < 1, \text{ obtendo que a série converge.}$$

Se uma série é convergente, significa que esta série possui uma soma finita e que, quanto maior o índice n em $s(n)$ (que representa as somas parciais desta série), mais a série se aproxima desta soma.

Vemos a seguir o gráfico das somas parciais aproximando-se da soma da série geométrica. Observamos que, já, para pequenos valores de n , estas somas tendem com tamanha rapidez à soma s (pontilhada), que passa a impressão de realmente a alcançar.



Exemplo 2: Verificar a convergência da série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

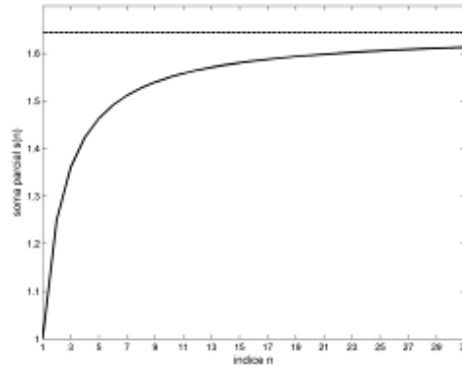
Para esta série, o teste da Razão não é aplicável:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2} = 1.$$

Mas podemos obter a convergência pelo teste de Raabe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 2 > 1.$$

Abaixo vemos o gráfico das somas parciais da série harmônica generalizada, onde a aproximação de $s(n)$ à soma s se dá mais devagar que a série geométrica; isto é, a velocidade de convergência é mais lenta.



Exemplo 3: Determinar o comportamento da série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n - \sqrt{n}) \ln^2 n}$.

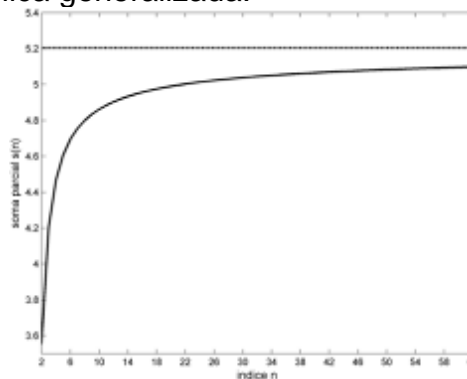
Vemos que o teste de Raabe não gera resultado para esta série:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 1.$$

Mas ao usar o teste de Bertrand, obtemos a convergência da mesma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2 > 1.$$

Vejamos o gráfico das somas parciais, convergindo ainda mais lentamente que a série harmônica generalizada.

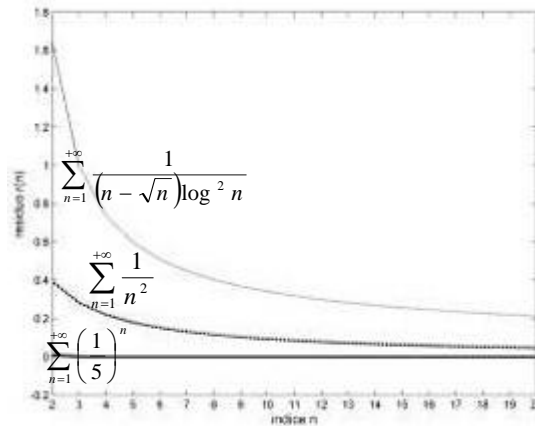


3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O teste da Razão é baseado na comparação com séries geométricas. Logo, não é uma surpresa que ele não pode ser aplicado às séries cuja convergência é mais lenta que a das geométricas, como harmônicas generalizadas e deriváveis dessas. O teste de Raabe é destinado, em particular, para resolver este problema. A sua formulação é baseada na comparação com as séries harmônicas generalizadas e, por isso, tem a forma mais refinada que o teste da Razão. No entanto, o teste de Raabe não permite tratar séries com convergência ainda mais

lenta, o que leva à introdução do teste de Bertrand, mais fino nesta categoria de testes.

Para os exemplos anteriores, podemos calcular a diferença $s - s(n) = r(n)$, onde $r(n)$ é o resíduo da série. Vemos os gráficos de resíduos das três séries apresentadas na figura abaixo:



Assim, observamos que quanto mais rápida a convergência da série, mais rápido a diferença $s - s(n) = r(n)$ se aproxima de zero.

4 CONCLUSÕES

Os resultados deste trabalho revelam a lógica por trás da construção de testes mais finos e a interligação entre diferentes critérios de convergência. Além disso, é mostrado que a necessidade de aplicação de testes mais sofisticados está relacionada com a velocidade da convergência de séries. Se a velocidade for significativamente rápida, testes simples podem ser aplicados. Caso contrário, quando o resíduo de uma série se aproxima de zero lentamente, é necessário aplicar testes mais finos.

5 REFERÊNCIAS

- BONAR, D.D.; KHOURY, M.J.. **Real Infinite Series**. MAA, 2006.
 BRESSOUD, D.. **A Radical Approach to Real Analysis**. MAA, 2006.
 BROMWICH, T. J. I.. **An Introduction to the Theory of Infinite Series**. AMS, 2005.
 FICHTENHOLZ, G. M.. **Infinite series: Rudiments**. Gordon and Breach Pub., 1970.
 FICHTENHOLZ, G. M.. **Infinite series: Ramifications**. Gordon and Breach Pub., 1970.
 GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M.. **Table of Integrals, Series, and Products**. Academic Press, 1994.
 HYSLOP, J. M.. **Infinite Series**. Kessinger Pub., 2008.
 KNOPP, K.. **Theory and Application of Infinite Series**. Dover Pub., 1990.
 RUDIN, W.. **Principles of Mathematical Analysis**. McGraw-Hill, 1976.