

# PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROSTÁTICAS EM PLASMAS NO MODELO DE FLUIDOS: DISTINÇÕES ENTRE CARACTERÍSTICAS DESCRITAS POR APROXIMAÇÕES LINEARES OU NÃO LINEARES

GERMANI, Felipe Tolentino Lopes  
Universidade Federal de Pelotas

GAELZER, Rudi  
Universidade Federal de Pelotas

## 1 INTRODUÇÃO

Plasmas são sistemas físicos compostos por partículas eletricamente carregadas que interagem tanto com campos eletromagnéticos externos ao sistema quanto com campos auto-consistentes gerados pelas cargas e pelo movimento relativo das partículas. A maior parte da matéria observada no sistema solar e no Universo está na forma de plasma, sendo a sua composição básica determinada por elétrons e por íons positivos, majoritariamente prótons mas com frações menores de partículas alfa e outros íons mais massivos, em proporções tais que o sistema se encontra eletricamente neutro em larga escala.

Na escala microscópica, contudo, o sistema pode possuir uma carga líquida, o que possibilita a ocorrência de flutuações e oscilações de carga, densidade, temperatura e outras propriedades físicas do sistema. Como consequência, o plasma pode sustentar e interagir com ondas tanto eletrostáticas quanto eletromagnéticas, constituindo-se em um sistema opticamente ativo. O estudo da propagação de ondas em plasmas é uma área de pesquisa importante e ativa, pois as mesmas permitem uma transferência rápida e eficiente de energia e informação entre distintos pontos do sistema.

Dentre as possíveis descrições matemáticas de um plasma, a descrição de fluido trata o plasma como se este fosse um fluido eletricamente carregado, sendo suas características físicas tais como densidade, campo de velocidade do fluido e temperatura determinados, em uma posição  $r$  e no instante  $t$ , por um conjunto de equações diferenciais não lineares e acopladas. A solução exata deste conjunto de equações é impossível e diversas aproximações são realizadas para viabilizar uma descrição analítica do comportamento do plasma.

Neste trabalho, serão discutidas a aproximação linear e as aproximações não lineares mais empregadas visando o estudo da propagação de ondas eletrostáticas no plasma na descrição de fluido e quais são as propriedades físicas relacionadas com a propagação de ondas descritas pelas aproximações realizadas.

## 2 METODOLOGIA (MATERIAL E MÉTODOS)

Considera-se um plasma não magnetizado, composto por elétrons térmicos ( $T_e \neq 0$ ) e prótons frios ( $T_p = 0$ ). Considerando-se somente ondas eletrostáticas, as equações que descrevem a evolução do plasma na descrição de fluidos são [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot n_j v_j &= 0 & m_j n_j \left[ \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_j \cdot \nabla v_j \right] &= q_j n_j E - 3k_B T_j \nabla n_j \\ \epsilon_0 \nabla \cdot E &= \sum_{j=e,p} q_j n_j & \nabla \times E &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Em (1),  $k_B$  é a constante de Boltzmann, ( $j = e$ ) denota elétrons e ( $j = p$ ) denota prótons. As quantidades  $m_j, q_j$  e  $T_j$  indicam, respectivamente, a massa, carga elétrica e temperatura das partículas da espécie  $j$ ;  $n_j(r, t)$  e  $v_j(r, t)$  indicam os campos de densidade e velocidade da mesma espécie e  $E(r, t)$  indica o campo elétrico da onda. As equações em (1) formam um sistema acoplado e não linear de equações que não possui solução exata.

## 2.1 Aproximação linear. Ondas de baixa amplitude em dois regimes de frequências

A aproximação linear ao sistema (1) é obtida realizando-se inicialmente a expansão perturbativa  $f(r, t) = f_0 + f_1(r, t)$  em todas as componentes de campo em (1), assumindo que as quantidades perturbadas sejam pequenas  $|f_1| \ll f_0$ . Desprezando-se então todos os termos não lineares resultantes, resulta o seguinte sistema linearizado de equações acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{1j}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot v_{1j} &= 0 & m_j n_0 \frac{\partial v_{1j}}{\partial t} &= q_j n_0 E_1 - 3k_B T_j \nabla n_{1j} \\ \epsilon_0 \nabla \cdot E_1 &= \sum_{j=e,p} q_j n_{1j} & \nabla \times E_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Para descrever a propagação de ondas eletrostáticas no plasma, o sistema (2) será resolvido escrevendo-se as quantidades variáveis em termos de componentes de séries de Fourier:  $f(r, t) = \bar{f} e^{i(kr - \omega t)}$ , sendo  $\bar{f}$  a amplitude do modo de Fourier,  $\omega$  é a frequência angular e  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda. As soluções de (2) serão obtidas para dois regimes de frequências: altas e baixas.

## 2.2 Aproximação não linear. Ondas de alta amplitude no regime de altas frequências

Será considerado o efeito não linear gerado pela força ponderomotiva que o campo elétrico exerce sobre os elétrons, criando regiões de alta densidade (*sólitons brilhantes*) ou de baixa densidade (*cávitons* ou *sólitons escuros*), as quais se mantêm estáveis e se propagam pelo plasma devido à competição entre a não linearidade da interação onda-partícula e a dispersão do pacote de ondas. Para tanto, considera-se somente a contribuição dos elétrons em (2) (ondas de alta frequência) e assume-se que a propagação da onda é unidimensional somente, ao longo da direção  $x$ .

Como as equações (2) são lineares, o efeito da força ponderomotiva é introduzido permitindo-se uma variação na densidade eletrônica  $n_e = n_0 + \delta n_e$  devido à propagação do sóliton. Esta força se deve à pressão que o campo elétrico da onda exerce sobre as partículas, causando uma variação não linear no valor local da densidade do plasma. Para um sóliton que se propaga com velocidade  $V$  pelo plasma, pode-se mostrar que [1]  $\delta n_e = (1/4)(m_p V^2/m_e - 1)^{-1} |v_{1e}|^2$ , sen-

do  $\nabla = V/\lambda_D \omega_{pe}$ , onde  $\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 k_B T_e / n_0 e^2}$  é o comprimento de Debye e  $\omega_{pe} = \sqrt{n_0 e^2 / \epsilon_0 m_e}$  é a frequência de plasma. Desta forma, as variáveis de campo satisfazem a equação de Schrodinger não linear [1–4]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + p \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + q |\psi|^2 \psi = 0, \quad (3)$$

a qual está escrita em termos das variáveis adimensionais em posição e tempo  $\xi$  e  $\tau$ , respectivamente. Em (3),  $\psi(\xi, \tau)$  denota as variáveis de campo e as constantes  $p$  e  $q$ , respectivamente denominadas *coeficientes de dispersão* e de *não linearidade*, dependem dos parâmetros do plasma.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na aproximação linear, a decomposição em termos de componentes de Fourier no sistema (2) resulta nas seguintes *relações de dispersão*:

*Baixa frequência:*  $\omega = \frac{c_s k}{\sqrt{1 + \lambda_D^2 k^2}} \quad (\text{ondas fon - acústicas})$

*Alta frequência:*  $\omega = \omega_{pe} \sqrt{1 + \lambda_D^2 k^2} \quad (\text{ondas de Langmuir}),$

sendo  $c_s = \sqrt{k_B T_e / m_p}$  a velocidade íon-acústica. A figura 1 mostra as correspondentes curvas de dispersão.

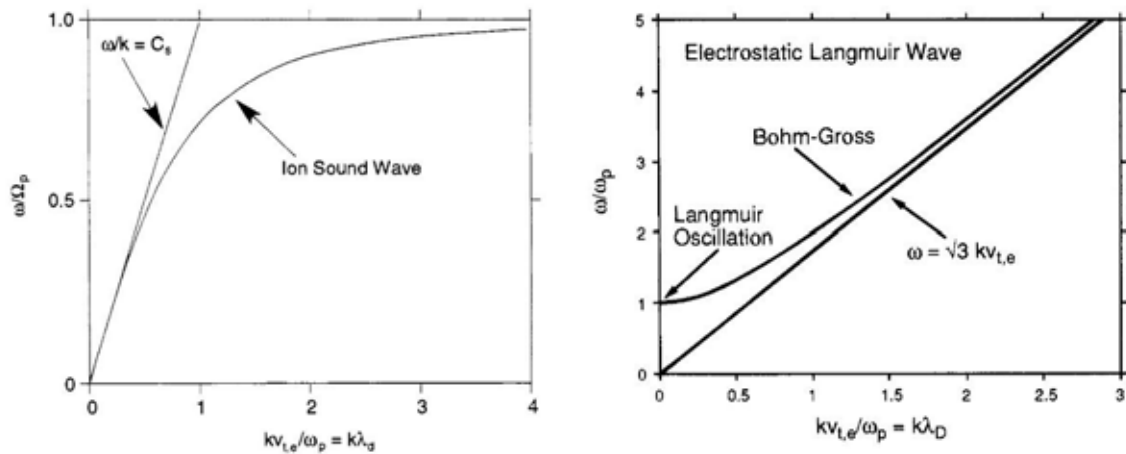


Figura 1. Curvas de dispersão para ondas íon-acústicas (esquerda) e de Langmuir (direita).

As amplitudes das variáveis de campo  $\tilde{n}_1, \tilde{v}_1, \tilde{E}_1$  permanecem indeterminadas. Portanto, a aproximação linear somente fornece informações a respeito dos modos normais de oscilação do plasma.

Já a aproximação não linear descrita pela equação (3) tem a solução

$$\psi(\xi, \tau) = \frac{2A^{1/2}}{q} \operatorname{sech} \left[ \frac{A^{1/2}}{q} (\xi - V\tau) \right] \exp \left[ iA\tau + \frac{V}{2p} \xi - \frac{V^2}{4p} \tau \right], \quad (4)$$

sendo  $A$  uma constante dada pelos parâmetros do plasma. A solução (4) descreve um *sóliton* se propagando pelo plasma. O tipo de *sóliton* depende do sinal do produto  $pq$ , conforme ilustrado na figura 2.

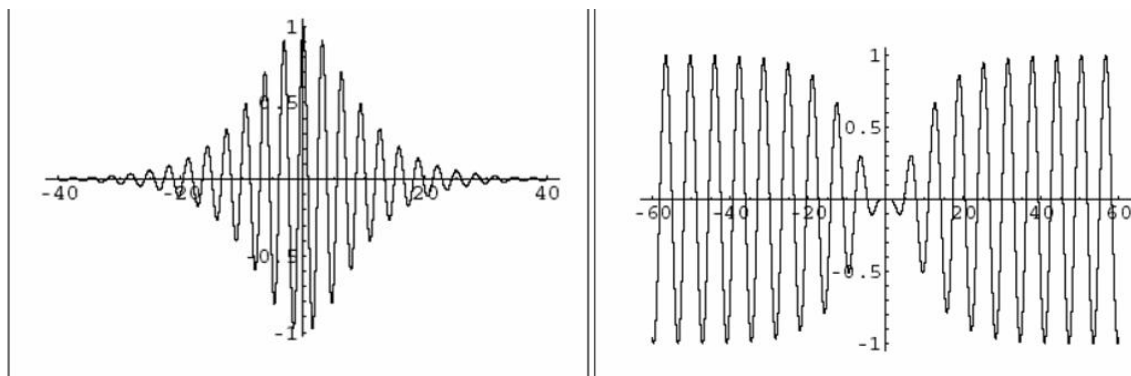


Figura 2. Esquerda: sóliton brilhante ( $p_4 > 0$ ). Direita: sóliton escuro ( $p_4 < 0$ ). A largura dos sólitons é determinada pela razão  $p/q$ .

Portanto, a inclusão de efeitos não lineares possibilita a obtenção de informações a respeito das amplitudes das variáveis de campo. A competição entre o termo não linear e o termo dispersivo provoca uma modulação na amplitude dos campos, em um processo denominado de *instabilidade modulacional* na literatura [1–4].

A figura ao lado mostra observações de sólitons brilhantes detectados na magnetosfera terrestre por espaçonaves em órbita em torno da Terra [4].



## 4 CONCLUSÕES

Foram discutidas as principais diferenças entre as aproximações lineares e não lineares ao estudo das oscilações eletrostáticas que ocorrem em um plasma não magnetizado na descrição de fluidos. Mostrou-se que a aproximação linear fornece informações basicamente relacionadas com as características de propagação das ondas (relações de dispersão), enquanto que aproximações não lineares permitem a inclusão de outros efeitos de interação onda-partícula, tais como a força ponderomotiva, os quais, em conjunto com a dispersão linear do pacote de onda, descrevem a modulação resultante na amplitude das ondas.

## 5 REFERÊNCIAS

- [1] CHEN, Francis F. **Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Volume 1: Plasma Physics.** New York : Springer, 1984.
- [2] BOYD, T. J. M.; SANDERSON, J. J. **The Physics of Plasmas.** New York : Cambridge, 2003.
- [3] TANIUTI, T.; YAGIMA, N. Perturbation method for a nonlinear wave modulation. 1. **Journal of Mathematical Physics**, v.10, n. 8, p. 1369-1372, 1969.
- [4] KOURAKIS, I.; SHUKLA, P. K. Ion-acoustic waves in a two-electron-temperature plasma: oblique modulation and envelope excitations. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v.36, p.11901-11913, 2003.