MODELO BIDIMENSIONAL PARA DISPERSÃO DE CONTAMINANTES EM RIOS: SOLUÇÃO VIA GILTT

FURTADO, Igor[1]
[1]*Discente do curso de Licenciatura em Matemática, UFPel; igorjara@gmail.com*

WEYMAR, Guilherme[1]
[1]*Discente do curso de Licenciatura em Matemática, UFPel; guicefetrs@gmail.com*

BUSKE, Daniela[2]
[2]*IFM/DME,Orientador, UFPel; daniela.buske@ufpel.edu.br*

QUADROS, Régis[2]
[2]*IFM/DME,UFPel, regis.quadros@ufpel.edu.br*

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos tempos tem aumentado de maneira significativa à preocupação com relação a problemas ambientais gerados pelos processos industriais, geração de energia e tratamento de rejeitos. Em cidades onde se concentra um alto índice populacional e industrial, os problemas são ainda maiores devido a uma maior atividade humana gerando resíduos, denominados poluentes, que causam impactos indesejáveis ao meio ambiente.

Uma questão de suma importância é com relação à água, pois sua disponibilidade no planeta é limitada. A água doce está cada vez mais escassa e seu valor está cada vez mais alto devido ao aumento da necessidade de consumo para diversos usos, fazendo com que a escassez da mesma torne-se o principal foco das discussões sobre poluição ambiental. Atribuem-se como principais fatores que contribuem para a degradação dos corpos hídricos: a falta de saneamento básico, o lançamento de efluentes industriais não devidamente tratados, projetos de irrigação, o desmatamento e a exploração dos recursos hídricos para fins energéticos.

Devido aos fatores expostos, torna-se de extrema importância estudos sobre o controle qualitativo e quantitativo das águas. Com o avanço computacional, a modelagem matemática surgiu como uma alternativa para prever o comportamento dos escoamentos e dispersão de poluentes. Tais modelos matemáticos contribuem em projetos de estações de tratamento de esgoto, na determinação da influência de obras hidráulicas na qualidade da água, vazamentos acidentais de resíduos tóxicos e etc.

Neste trabalho apresentaremos um modelo bidimensional em regime permanente para a dispersão de poluentes em rios e canais. Neste primeiro trabalho nosso objetivo principal é apresentar a solução deste problema que será obtida analiticamente pela técnica GILTT (do inglês "Generalized Integral Laplace Transform Technique") (Buske, 2008; Moreira et al., 2009). A GILTT é usada para prever o comportamento do poluente dispersado, sendo este um método espectral que combina uma expansão em série com uma integração. Na expansão, é usada uma base trigonométrica determinada com o auxílio de um problema associado de Sturm-Liouville. A integração é feita em todo o intervalo da variável transformada, fazendo proveito da propriedade de ortogonalidade da base usada na expansão. A solução do sistema EDO resultante da aplicação da

GILTT é feita analiticamente via transformada de Laplace e diagonalização. A derivação da solução do problema é analítica exceto pelo erro de truncamento.

2 METODOLOGIA (MATERIAL E MÉTODOS)

Neste trabalho apresentaremos uma solução para um problema bidimensional no plano longitudinal e vertical em regime permanente que modela a dispersão de poluentes em rios e canais. A formulação do problema em forma adimensional encontra-se abaixo:

$$u\frac{\partial C}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Z}\left(\varepsilon_Z \frac{\partial C}{\partial Z}\right) - \lambda C \qquad (1)$$

onde u é a velocidade de escoamento longitudinal; C é a concentração adimensional do poluente; ε_Z a difusividade adimensional; λ o coeficiente de reação química adimensional; Z e X as coordenadas espaciais adimensionais, definidas por $Z = \frac{z}{d}$; $X = \frac{x}{d}$ e d a profundidade do rio. A equação (1) está sujeita as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial Z} = 0 & \text{em } Z = 0 \text{ e } Z = 1 \\ C(0,Z) = \delta(Z - Z_0) & \text{em } X = 0 \end{cases}$$

A equação (1) é resolvida utilizando a técnica GILTT. Inicialmente, expandimos a concentração de poluentes da seguinte forma:

$$C(X,Z) = \sum_{n=0}^{N} \overline{C}_n(X)\psi_n(Z) \qquad (2)$$

onde $\psi_n(Z) = \cos(\beta_n Z)$ com $\beta_n = n\pi \; (n = 0,1,2,\ldots)$, são as autofunções e autovalores do problema de Sturm-Liouville associado ao problema original.

Para encontrarmos a solução da variável transformada $\overline{C}_n(X)$ substituímos a eq.(2) na eq.(1) e em seguida fazemos uso da propriedade de ortogonalidade das autofunções e integramos o resultado em todo o domínio, ou seja, multiplicamos pelo operador $\int_0^1 (\,)\psi_m(Z)dZ$. Assim:

$$-u\sum_{n=0}^{N} \overline{C'}_n(X)\int_0^1 \psi_n(Z)\psi_m(Z)dZ + \sum_{n=0}^{N} \overline{C}_n(X)\left[-\beta_n^2\int_0^1 \varepsilon_z\psi_n(Z)\psi_m(Z)dZ + \int_0^1 \varepsilon_z'\psi'_n(Z)\psi_m(Z)dZ - \lambda\int_0^1 \psi_n(Z)\psi_m(Z)dZ\right] = 0$$

Definindo:

$E(X)$ o vetor cujas componentes são $\overline{C}_n(X)$

$$a_{nm} = -u\int_0^1 \psi_n(Z)\psi_m(Z)dZ$$

$$b_{nm} = -\beta_n^2\int_0^1 s_z\psi_n(Z)\psi_m(Z)dZ + \int_0^1 s_z{\psi'}_n(Z)\psi_m(Z)dZ - \lambda\int_0^1 \psi_n(Z)\psi_m(Z)dZ$$

teremos em notação matricial o problema transformado:

$$E'(X) + FE(X) = 0 \qquad (3)$$

onde $F = A^{-1}B$. A equação (3) possui condição inicial $E(0) = \bar{C}_n(0)$.

Para obtermos $E(0)$ utilizamos a condição inicial do problema (1) e aplicamos o mesmo procedimento anterior. Temos então:

$$C(0,Z) = \delta(Z - Z_0) = \sum_{n=0}^{N} \bar{C}_n(0)\psi_n(Z)$$

Se multiplicarmos pelo operador $\int_0^1 (\,)\psi_m(Z)dZ$ e usarmos a propriedade de ortogonalidade de autofunções vamos obter o resultado:

$\bar{C}_0(0) = \psi_0(Z_0)$ para $n = 0$ e $\bar{C}_n(0) = 2\psi_n(Z_0)$ para $n \neq 0$.

O problema transformado (3) será resolvido analiticamente aplicando a técnica da transformada de Laplace:

$$sE(s) + FE(s) = E(0) \qquad (4)$$

A seguir, utilizaremos o processo de diagonalização a matriz F, ou seja, reescrevemos a matriz F como $F = GDG^{-1}$ onde D é a matriz diagonal de autovalores da matriz F e G é a matriz dos respectivos autovalores. Substituindo F na eq.(4):

$$sE(s) + GDG^{-1}E(s) = E(0) \rightarrow E(s) = G(sI + F)^{-1}G^{-1}E(0)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na equação anterior obtemos:

$$E(X) = G\mathcal{L}^{-1}\{(sI + F)^{-1}\}G^{-1}E(0)$$

onde : $\mathcal{L}^{-1}\{(sI + F)^{-1}\} = H(X) = \begin{bmatrix} e^{-d_1 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-d_N x} \end{bmatrix}$

ou seja:

$$E(X) = GH(X)G^{-1}E(0). \qquad (5)$$

Portanto a equação de concentração do poluente está bem determinada, uma vez que o vetor $\bar{C}_n(X)$ agora é conhecido (Eq. (5)).

3 CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi apresentar uma solução analítica para um modelo de dispersão de poluentes em rios e canais. Nosso próximo passo é implementar computacionalmente a solução obtida, em linguagem Fortran, e comparar os resultados obtidos com dados da literatura (Barros, 2004). Cabe salientar que a solução obtida por Barros é semi-analítica. Em Barros a técnica utilizada para resolver o mesmo problema é a técnica da transformada integral generalizada (GITT) e o problema transformado (Eq. (3)) é resolvido via subrotinas numéricas.

4 REFERÊNCIAS

BARROS, F.P.J.. **Modelos Multidimensionais para Dispersão de Contaminantes em Rios e Canais: Soluções Híbridas por Transformação Integral.** 2004. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

BUSKE, D.. **Solução GILTT bidimensional em geometria cartesiana: simulação da dispersão de poluentes na atmosfera**. 2008. Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS, Porto Alegre, RS.

MOREIRA, D.M.; VILHENA M.T.; BUSKE, D.; TIRABASSI T.. The State-of-art of the GILTT Method to Simulate Pollutant Dispersion in the Atmosphere. **Atmospheric Research**. v 92. p 1-17, 2009.