SOBRE $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ SER DENSO EM $\mathbb{R}$

AFONSO, Reginaldo Fabiano da Silva[1]; BECK, Vinicius Carvalho[2]; GRÜTZMANN, Thaís Philipsen[3]; SOUZA, João Artur[4].

[1]Aluno de Mestrado em Matemática - PPGM/UFRGS;
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Campus do Vale – CEP 91509-900 - Porto Alegre - RS – BRASIL.
regis.fab@gmail.com
[2] Aluno de Mestrado em Matemática - PPGM/UFRGS;
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Campus do Vale – CEP 91509-900 - Porto Alegre - RS - BRASIL.
vonoco@gmail.com
[3]Professora do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância - CLMD/UFPel;
Agência da Lagoa Mirin – Lobo da Costa 412 – CEP 96010-900. thaisclmd@gmail.com
[4]Professor do Departamento de Engenharia do Conhecimento – DEGC/UFSC;
Campus Reitor João David Ferreira Lima - Trindade - Florianópolis - Santa Catarina - Brasil –
CEP 88040-970 - jartur@egc.ufsc.br

1 INTRODUÇÃO

O estudo de conjuntos densos na reta real faz parte de uma área da matemática chamada topologia. Entretanto nem todos os autores de livros que englobam esse tema apresentam demonstrações detalhadas sobre o assunto. O objetivo deste trabalho é apresentar tal demonstração sobre o fato de o $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$. Assim, visando a meta proposta teremos que nos valer de que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo. Como as noções de corpo e corpo ordenado, possuem interesse algébrico próprio, e isso foge do objetivo desse artigo, apenas citaremos essas definições e algumas propriedades pertinentes para que mostremos a existência de um número irracional entre quaisquer dois números reais dados.

2 MATERIAL E MÉTODO

O método utilizado para a realização deste trabalho foi a pesquisa em livros e artigos que introduzem e exploram o conjunto dos números reais.

Nosso objetivo é propor uma demonstração detalhada de que o conjunto dos números irracionais é denso na reta. Visando essa meta, iremos expor definições as quais encontramos na bibliografia matemática.

Definição 1: Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$, munido de duas operações, chamadas adição (+) e multiplicação (.) que satisfazem as seguintes condições, chamadas axiomas do corpo.

(i) $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x,y,z \in \mathbb{K}$.
(ii) $x+y = y+x, \forall x,y \in \mathbb{K}$.
(iii) Existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x+0 = x, \forall x \in \mathbb{K}$.
(iv) Dado $x \in \mathbb{K}$, existe $(-x) \in \mathbb{K}$ tal que $x+(-x) = 0$.
(v) $(x.y).z = x.(y.z), \forall x,y,z \in \mathbb{K}$.
(vi) $x.y = y.x, \forall x,y \in \mathbb{K}$.
(vii) Existe $1 \in \mathbb{K}$, tal que, $1 \neq 0$ e $x.1 = x, \forall x \in \mathbb{K}$.
(viii) Dado $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$, existe $(x^{-1}) \in \mathbb{K}$ tal que $x.x^{-1} = 1$
(ix) $x.(y+z) = x.y + x.z, \ \forall x,y,z \in \mathbb{K}$.

Um exemplo desse tipo de estrutura algébrica é o conjunto dos números reais, no qual concentraremos nossos estudos.

Definição 2: Um corpo ordenado é um corpo $\mathbb{K}$, no qual se destacou um subconjunto $\mathbb{P}\subset\mathbb{K}$, chamado o conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{K}$, tal que as seguintes afirmações são satisfeitas:

Seja, $x, y \in \mathbb{P} \rightarrow x + y \in \mathbb{P}$ e $x.y \in \mathbb{P}$

Dado $x \in \mathbb{K}$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{P}$ ou $-x \in \mathbb{P}$.

Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, escrevemos $x < y$, para significar que $y \quad x \subset \mathbb{P}$, e $x \leq y$, para representar que $y \quad x \subset \mathbb{P} \cup \{0\}$.

Decorre da definição de corpo ordenado as seguintes propriedades as quais omitiremos suas demonstrações:

O1-Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$

O2- Dados $x, y \in \mathbb{K}$ ocorre exatamente uma das seguinte alternativas: ou $x = y$ $x < y$ ou $y < x$.

O3- Se $x < y$, então, para todo $z \in \mathbb{K}$, tem-se $x + z < y + z$.

O4- Se $x < y$, então, para todo $z > 0 \in K$, tem-se $x.z < y.z$. Se, porém, for $z < 0 \subset K$, então $x < y$ implica $y.z < x.z$.

Obs. 1: Em um corpo ordenado também temos que se, $x \in \mathbb{K}$, $x > 0$, então, $x^{-1} > 0$.

Obs. 2: O principio da boa ordenação (P.B.O) conhecido em $\mathbb{N}$, aliado a definição de corpo ordenado nos permite provar que se $X\subset\mathbb{Z}, X \neq \emptyset$ for limitado inferiormente, então X possui um menor elemento.

Definição 3: Um conjunto $X\subset\mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b, \forall x \in \mathbb{R}$. Neste caso dizemos que b é uma cota superior de X.

Definição 4: Um conjunto $X\subset\mathbb{R}$ diz-se limitado inferiormente quando existe algum $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq c, \forall x \in \mathbb{R}$. Neste caso dizemos que c é uma cota inferior de X.

Quando um conjunto é limitado superiormente e inferiormente dizemos que esse conjunto é limitado.

Definição 5: Seja $X\subset\mathbb{R}, X\neq\emptyset$, limitado superiormente. Um número, $b \in \mathbb{R}$ chama-se o supremo do conjunto X, quando é a menor das cotas superiores de X.

Definição 6: Seja $X\subset\mathbb{R}, X\neq\emptyset$, limitado inferiormente. Um número, $c \in \mathbb{R}$ chama-se o ínfimo do conjunto X, quando é a maior das cotas inferiores de X.

Definição 7: Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ chama-se completo quando todo subconjunto não vazio, limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{K}$.

Resulta da definição 7 que em um corpo ordenado completo todo o subconjunto não vazio, limitado inferiormente possui ínfimo.

Axioma: Existe pelo menos um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado corpo dos números reais.

Proposição: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ não é limitado Superiormente.

Dem.: Suponha, por absurdo, que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Os axiomas de Peano garantem que $\mathbb{N} \neq \emptyset$. Deste modo, temos que $\mathbb{N}$ possui supremo. Seja $c = \sup(\mathbb{N})$. Assim pela definição 5, temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c-1<n$. Pela propriedade O3, temos que $c < n + 1 \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo. Logo conclui-se que $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Teorema 1: Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ é ilimitado superiormente.

(ii) Dados $x, y \in \mathbb{K}$, com $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.x > y$.

(iii) Dado $x \in K$, $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.

Dem.: ((i) $\rightarrow$ (ii)) Sejam $x, y \in K$, com $x > 0$. Como $\mathbb{N} \subset K$ é ilimitado superiormente, vem que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que, $n > \frac{y}{x}$. Por O4, juntamente com a observação 1, temos que $n.x > y$.

((ii) $\rightarrow$ (iii)) Seja $x \in K$, $x > 0$, por (ii) temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.x > 1$. Logo, temos a seguinte seqüência de desigualdades: $0 < \frac{1}{n} < x$.

((iii)$\rightarrow$(i)) Seja $x \in K$, $x > 0$, pela observação 1, temos que $\frac{1}{x} > 0$. Logo, por (iii) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{x}$. Donde vem que, $x < n$, ou seja, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.♦

Um corpo ordenado K é denominado arquimediano quando nele é valida qualquer uma das 3 condições enunciadas no teorema 1. Assim, temos que $\mathbb{R}$ é um corpo arquimediano.

Lema 1: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dem.: Suponha por absurdo que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, logo existem $r, s \in \mathbb{Z}$, primos entre si, com $s \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$. Ou seja, $2s^2 = r^2$. Da ultima igualdade, vem que 2| r^2 e desse fato, segue-se que 2| r. Agora, como 2|r e $2s^2 = r^2$, infere-se que, 2| s. Mas isso contraria o fato de r e s serem primos entre si. Logo inferimos que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. ♦

Lema 2: Se $m, p \in \mathbb{Z}^*$, então, $\frac{m}{p}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dem.: Suponha, por absurdo, que $\frac{m}{p}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, com $m, p \in \mathbb{Z}^*$. Logo existem $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$, tais que, $\frac{m}{p}\sqrt{2} = \frac{r}{s}$. Donde vem que, $\sqrt{2} = \frac{rp}{sm}$, ou seja, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, o que é um absurdo! Logo $\frac{m}{p}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ quando $m, p \in \mathbb{Z}^*$. ♦

Definição 8: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se denso em $\mathbb{R}$ quando dados arbitrariamente, $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Existe $x \in X$, tal que, $a < x < b$.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Teorema 2: O conjunto dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$

Dem.: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Da desigualdade anterior vem que $0 < b - a$, logo existe um número natural p, tal que, $0 < \frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ (teorema 1), ou seja, $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$. Consideremos o conjunto $A = \left\{m \in \mathbb{Z} | \frac{m\sqrt{2}}{p} \geq b\right\}$. Pelo lema 2, temos que se $m \neq 0$, então, $\frac{m}{p}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Notamos que o conjunto A é não vazio, pois como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, existe um número natural k, tal que, $k > p|b|$, e constamos sem dificuldade que $k \in A$. Portanto, $A \neq \varnothing$, além disso, como $\mathbb{R}$ é arquimediano e A é um conjunto não vazio de números inteiros limitado inferiormente por $\frac{bp}{\sqrt{2}}$, logo temos que possui elemento mínimo (vide Obs.: 2).

Seja $m_0 \in A$, m_0 = menor elemento de A, então, $\frac{m_0\sqrt{2}}{p} \geq b$. Abriremos a análise em dois casos distintos que seguem:

1° caso: $m_0 \neq 1$.

Como $m_0 > m_0 - 1$, temos que, $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} < b$. Afirmamos que, $a < \frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} < b$. Com efeito, se não fosse assim teríamos $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} \leq a < b \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{p}$, o que implica em $\frac{\sqrt{2}}{p} \geq b - a$ (contradição!) Logo o numero irracional $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}$ pertence ao intervalo (a, b).

2° caso: $m_0 = 1$.

Se $m_0 = 1$, temos que $b > 0$, pois caso contrário, teríamos que $m_0 < 1$. Agora, como $m_0 = 1$, pela propriedade do conjunto A, vem que, $\frac{1\sqrt{2}}{p} \geq b$. Afirmamos que existe $j \in \mathbb{N}$, tal que, $\frac{\sqrt{2}}{p+j} < b$. De fato, suponha, por absurdo, que $\frac{\sqrt{2}}{p+j} \geq b, \forall j \in \mathbb{N}$, logo, $\frac{\sqrt{2}}{b} - p \geq j, \forall j \in \mathbb{N}$, donde vem que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente o que é um absurdo, logo a afirmação foi provada.

Seja $B = \left\{ j \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{\sqrt{2}}{p+j} < b \right\}$. Como $B \neq \emptyset$, pelo P.B.O. válido em $\mathbb{N}$, temos que B possui um menor elemento, o qual denominamos j_0. Afirmamos que $a < \frac{\sqrt{2}}{p+j_0} < b$. Com efeito, se não fosse assim, teríamos $\frac{\sqrt{2}}{p+j_0} \leq a < b \leq \frac{m_0\sqrt{2}}{p}$, o que implica em $\frac{\sqrt{2}}{p} > \left(\frac{j_0}{p+j_0}\right)\frac{\sqrt{2}}{p} = \frac{\sqrt{2}}{p} - \frac{\sqrt{2}}{p+j_0} \geq b - a$ (contradição!). Logo o numero irracional $\frac{\sqrt{2}}{p+j_0}$ pertence ao intervalo (a, b), desde que as condições do segundo caso sejam satisfeitas. ♦

4 CONCLUSÕES

Concluímos que é possível apresentar uma demonstração para o fato de o conjunto dos números irracionais ser denso na reta real sem omitir passos e de modo que seja entendível a boa parte da comunidade. Esse cuidado implicaria diretamente no auto entendimento de conceitos necessários para um avanço na área de matemática.

5 REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise, volume 1**. Rio de Janeiro: CNPq, 1995.
LIMA, Elon Lages. **Análise Real, volume 1**. Rio de Janeiro: CNPq, 1997.
ÁVILA, Geraldo. **Introdução a Análise Matemática**. Brasília: Editora Edgard Blücher, 1999.