XIX CIC XII ENPOS II MOSTRA CIENTÍFICA 2010

NÚMEROS COMPLEXOS: ABORDAGEM GEOMETRICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

HELING, Gabriela Iven[1]; PRANKE, Amanda[2]; ROCHA, Kátia Martins[3];

Discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas-UFPel; [1]gabryelaih@hotmail.com; [2]amandapranke@ymail.com; [3]kmartinsrocha@bol.com.br

SIMCH, Márcia Rosales Ribeiro

Docente do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas-UFPel; marciasimch@gmai.com.

1. INTRODUÇÃO

No início do século XVI um grupo de matemáticos italianos procurava uma fórmula análoga à fórmula de Bhaskara para resolver as equações de 3º grau. Em 1530 Rafael Bombelli concebeu a possibilidade da existência de raízes quadradas de números negativos; posteriormente, Euler desenvolveu enormemente a álgebra dos complexos e introduziu o símbolo i para $\sqrt{-1}$. Porém, somente na passagem do século XVIII para o século XIX, Wessel e Argand compreenderam os números complexos como pontos (ou vetores) do plano, que se somam através da composição de translações, e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações. Em 1799, Gauss demonstrou geometricamente o Teorema Fundamental da Álgebra. E assim, devido à grande contribuição de Argand e Gauss ao desenvolvimento desses números, o plano complexo recebe o nome desses matemáticos.

Pelo desenvolvimento histórico da descoberta da teoria dos números complexos, na maior parte das vezes o ensino dessa temática se faz através de uma abordagem algébrica. No entanto, trataremos neste trabalho de uma abordagem geométrica, através da resolução de problemas onde os números se apresentam como pontos ou vetores do plano, e as operações entre eles como transformações geométricas.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Com intuito de trabalharmos a geometria dos números complexos, enunciaremos a seguir “o problema da Ilha do Tesouro” (ver Carneiro (1999)).

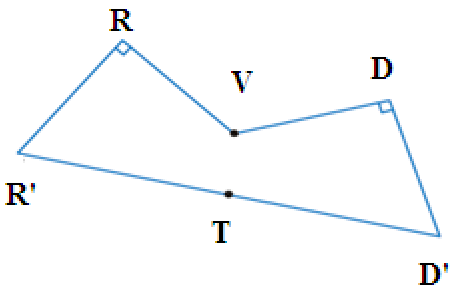
> *Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo ângulo de 90°, à direita e caminham o mesmo números de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90º, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio, entre as duas marcas.*

Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais. Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: “Vamos imaginar que a arvore estivesse aqui.” Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.
A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático?

Apresentaremos a resolução do referido problema (ver Carneiro et al. (2001)) e após essa exposição poderemos afirmar que o pirata era um conhecedor de vários princípios matemáticos:

No plano complexo, a diferença entre dois números corresponde ao vetor com origem no primeiro ponto e extremidade no segundo, ou seja, $\overline{AB} = B - A$; a multiplicação de um complexo, por exemplo, com extremidade em A, pela unidade imaginária i, equivale à rotação de 90^0 do raio vetor $\overline{OA}$, no sentido positivo.

A seguir, esse problema é ilustrado pela figura abaixo, onde V representa a árvore, D e R as pedras e T o ponto médio dos pontos D’ e R’, sendo que é neste que se encontra o tesouro.

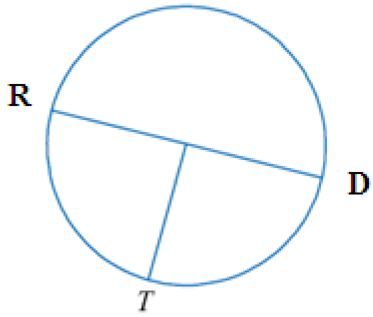


Considerando estes pontos pertencentes ao plano complexo, tem-se:

$$T = \frac{D' + R'}{2} = \frac{D - i(D - V) + R + i(R - V)}{2} = \frac{D + R}{2} + i\frac{R - D}{2},$$

independentemente da localização da origem.

Esse resultado demonstra que a localização do tesouro independe da posição da árvore e também permite localizá-lo como terceiro vértice de um dos triângulos retângulos isósceles com a hipotenusa RD.



3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na maioria das escolas de Ensino Médio os números complexos são considerados de difícil compreensão, e conseqüentemente não tem recebido grande atenção. Nas poucas vezes em que conteúdos envolvendo esses números são trabalhados, o enfoque é puramente algébrico, ou seja, perde-se a riqueza da visualização fornecida pela abordagem geométrica. Porém, destacamos que numa abordagem geométrica, não se deve excluir a algébrica, pois caso contrário tal ensino continuará sem sentido, ou seja, tais abordagens devem ser trabalhadas concomitantemente.

O problema aqui apresentado é um exemplo das inúmeras aplicações dos números complexos, visto que os mesmos aparecem em problemas que envolvem rotações, círculos, funções trigonométricas, movimentos periódicos, etc., portanto, os encontramos no estudo de circuitos elétricos, corrente alternada, astronomia, motores e mecânica quântica. Deste modo, já que a aplicabilidade é vasta, podemos explorá-las na escola, para uma aprendizagem mais significativa.

4. CONCLUSÕES

A partir dessa breve apresentação, inferimos sobre as possibilidades de resultados significativos para a construção de pensamento algébrico, através do ensino dos números complexos, pois abordagens contextualizadas como essa contribuem para o processo de aprendizagem e compreensão de conceitos na Matemática.

Finalmente, fica claro que $i^2 = -1$, pois corresponde ao seguinte fato geométrico: a aplicação de duas rotações de 90º em torno da origem, ou seja, uma reflexão em torno da origem.

5. REFERÊNCIAS

CARMO, Manfredo P. do, ***Trigonometria e Números Complexos***. Rio de Janeiro: SBM, 1979.

CARNEIRO, J.P., ***Resolução de Equações Algébricas.*** Rio de Janeiro: Ed. Universidade Santa Úrsula, 1998.

CARNEIRO, J.P, *Los* ***Números Complejos en La Isla del Tesoro,*** **em Memorias del III Congresso Iberoamericano de Eduacación Matemática.** Caracas: Universidade Cenral de Venezuela, 1999.

CARNEIRO, J.P, ***A ilha do tesouro: dois problemas e duas soluções****.* Revista do Professor de Matemática, n°47, p.1-4, 2001.

GARBI, Gilberto Geraldo. ***O romance das equações algébricas***. São Paulo: Makron Books, 1997.

http://rdmf.com.br/arquivos/downloads/429ccf0eb86bbf1d45f58a32026579f6.pdf. Acessado em 20/05/10.