EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE 2ª ORDEM: UMA APLICAÇÃO

HELING, Gabriela Iven[1]; PRANKE, Amanda[2]; ROCHA, Kátia Martins[3].

Discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas-UFPel;
[1]gabryelaih@hotmail.com; [2]amandapranke@ymail.com; [3]kmartinsrocha@bol.com.br

SIMCH, Márcia Rosales Ribeiro
Docente do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas;
marciasimch@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas oscilatórios podem ser estudados mediante equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem, provenientes da aplicação de leis físicas, como as leis de Newton, leis de Hooke e hipóteses, tais como amortecimento proporcional à velocidade.

Trataremos aqui das oscilações livres, que são representadas por equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de 2ª ordem, cujas raízes características fornecem as freqüências natural e amortecida, a fase e a amplitude do movimento, no caso subamortecido.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Consideremos um sistema massa-mola composto por uma massa *m* acoplada a uma mola cuja constante elástica é *k*, conforme Figura 1. Na parte (a) da Figura, tem-se a mola de comprimento l suspensa na vertical. Na parte (b), observa-se que o corpo de massa m deforma a mola em um comprimento igual a Δl, de modo que ocorre o equilíbrio entre a força restauradora da mola e o peso do corpo na posição $x = 0$. Na parte (c), observa-se que a mola exerce uma força para cima igual a $k(\Delta l - x) = k\Delta l - kx = mg - kx$, sendo *x* a elongação (ou compressão) da mola. Logo, a força resultante é igual a $(mg - kx) - mg = -kx$.

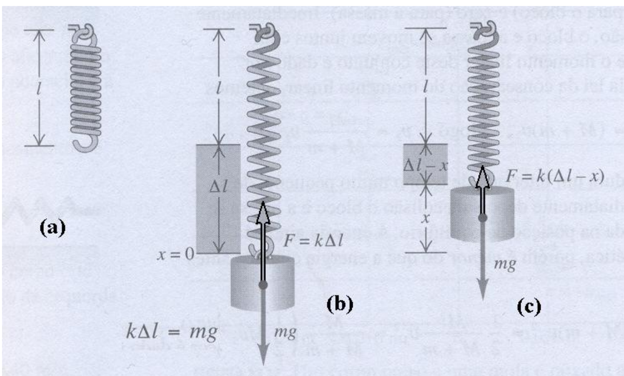

Figura 1 - Representação do diagrama de forças de um sistema massa-mola

Considerando $x = x(t)$ e a segunda lei de Newton, obtém-se:

$$m\,x''(t) = -\,kx(t)\,. \tag{1}$$

2.1. OSCILAÇÕES LIVRES SEM AMORTECIMENTO

Este é o caso descrito por (1), que resulta na seguinte equação diferencial:

$$m\,x''(t) + kx(t) = 0\,. \tag{2}$$

Como a equação característica associada à equação (2) é

$$md^2 + k = 0\,, \tag{3}$$

a solução geral de (2) é:

$$x(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\operatorname{sen}(\omega_0 t)\,, \tag{4}$$

onde *x*(*t*) é a posição da massa em relação à origem do sistema de referência, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, a quantidade $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ é denominada *a freqüência natural do sistema*.

Chamando $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, este número dá *a amplitude da oscilação*; mediante esta relação pitagórica, pode-se impor a condição que $c_1 = R\cos(\delta)$ e $c_2 = R\operatorname{sen}(\delta)$, donde $\delta = \arccos(c_1 / R)$ é denominada a *fase do sistema*. Assim,

$$x(t) = R\left(\cos(\delta)\cos(\omega_0 t) + \operatorname{sen}(\delta)\operatorname{sen}(\omega_0 t)\right) = R\cos(\omega_0 t - \delta)\,. \tag{5}$$

Essa solução é periódica, com período $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Este movimento periódico é chamado *movimento harmônico simples*.

2.2. OSCILAÇÕES LIVRES COM AMORTECIMENTO

Agora, em se tratando de oscilações amortecidas, a equação diferencial para o movimento da massa é

$$m\,x''(t) + \gamma\,x'(t) + kx(t) = 0 \tag{6}$$

onde o termo $\gamma\,x'(t)$ corresponde ao amortecimento da oscilação, que supõe-se proporcional à velocidade da mola.

A equação característica associada à equação (6) é:

$$md^2 + \gamma\,d + k = 0\,, \tag{7}$$

com,

$$\Delta = \gamma^2 - 4km\,. \tag{8}$$

Sendo assim, devemos considerar três casos:

1º) Se $\Delta > 0$, temos as seguintes raízes:

$$d_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\Delta}}{2m}\,, \tag{9}$$

portanto, a solução geral de (6) será

$$x(t) = c_1 e^{d_1 t} + c_2 e^{d_2 t}\,. \tag{10}$$

2º) Se $\Delta = 0$, a solução geral de (6) será

$$x(t) = c_1 e^{-\gamma t/2m} + c_2 t e^{-\gamma t/2m}. \qquad (11)$$

3º) Se $\Delta < 0$, a solução geral de (6) será

$$x(t) = e^{-\gamma t/2m}(c_1 \cos \mu t + c_2 sen \mu t), \qquad (12)$$

onde $\mu = \dfrac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m}$. É importante observar que μ é chamado de *freqüência amortecida.* Escrevendo $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, com $c_1 = R\cos(\delta)$ e $c_2 = R\,\mathrm{sen}(\delta)$, obtemos $\delta = \arccos(c_1 / R)$, e então:

$$x(t) = e^{-\gamma t/2m}(R\cos\delta \cos \mu t + R sen\delta\, sen \mu t) = Re^{-\gamma t/2m}\cos(\mu t - \delta) \qquad (13)$$

Em todos os casos as soluções x(t)→0 quando t→+∞, sendo assim, no primeiro caso o movimento é chamado super amortecimento, no segundo amortecimento critico e no terceiro sub amortecimento.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir do exposto acima, serão apresentados exemplos de oscilações livres, com e sem amortecimento, ilustrados através de representações gráficas que permitirão uma comparação entre os comportamentos das soluções, especificamente, da solução de um oscilador harmônico simples e um oscilador subamortecido.

Exemplo 1: Sabendo que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por: $x'' + 2x = 0$, com condições iniciais $x(0)=1$ e $x'(0)=0$.

A solução gráfica de t versus x, Gráfico 1, é mostrada a seguir:

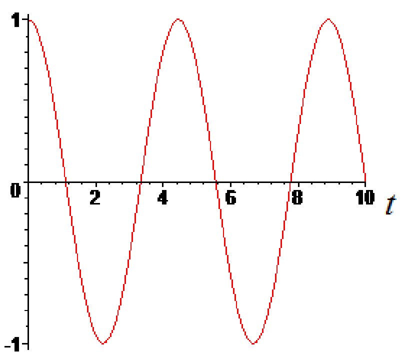

Gráfico 1: Solução do sistema massa-mola livre não amortecido.

Neste exemplo temos que a amplitude $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$,

a freqüência $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{2}$,

a fase $\delta = \arccos(c_1/R) = \arcos 1 = 0$ e o

período $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{2}\pi$.

Exemplo 2: Sabendo que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por: $x'' + 4x' + 8x = 0$, com condições iniciais $x(0)=1$ e $x'(0)=0$.

A solução gráfica de t versus x é mostrada na figura abaixo. Neste caso, como $\Delta = \gamma^2 - 4km = 4^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1 = 16 - 32 = -16 < 0$, temos um movimento subamortecido.

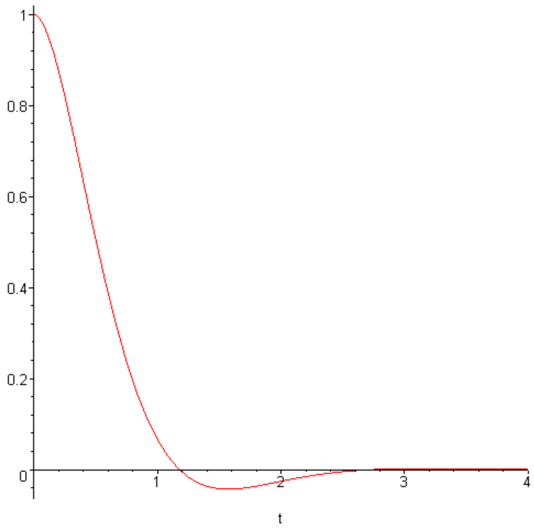

Gráfico 2: Solução do sistema massa-mola livre com amortecimento

Neste exemplo temos que a amplitude $R=\sqrt{c_1^2+c_2^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,
a freqüência $\omega_0=(k/m)^{1/2}=\sqrt{8}$,
a freqüência amortecida $\mu=\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}=\frac{\sqrt{32-16}}{2}=2<\sqrt{8}=\omega_0$, a fase $\delta=\arccos(c_1/R)=\arccos(\sqrt{2}/2)=\frac{\pi}{4}$
e o período $T=\frac{2\pi}{\sqrt{8}}<\pi$

4. CONCLUSÕES

Uma vantagem de expressar as oscilações em termos de equações diferenciais é que podemos resolver de maneira fechada tais oscilações. Posteriormente, pode-se estabelecer analogias entre sistemas físicos oscilantes diferentes, tais como um pêndulo simples com pequenas oscilações e até com circuitos elétricos, ou seja, entre sistemas mecânicos e elétricos. Portanto, através deste trabalho mostramos exemplos de aplicações das equações diferenciais lineares de 2ª ordem, onde trabalhamos com oscilações livres, discutindo sobre o comportamento de suas soluções gráficas e analisando as diferenças entre os casos com e sem amortecimento.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard; BIVENS Irl; DAVIS Stephen. ***Cálculo***. V.2. -8. ed.- Porto Alegre: Bookman, 2007.

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. ***Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno***. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio; 8ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BRONSON, Richard. ***Moderna Introdução as Equações Diferenciais***. Tradução de Alfredo Alves de Farias, revisão técnica Roberto Romano. São Paulo, McGraw-Hill, 1977.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. ***Equações Diferenciais Aplicadas***. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1997.

SIMCH, Márcia Rosales Ribeiro; SUAZO, Gérman Ramón Canahualpa; PINTO, Silvia Prietsch. - ***Cálculo D***. Pelotas: Editora Universitária/ UFPEL, Ministério da Educação, 2009.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. ***Equações Diferenciais***. V.1. Tradução Antonio Zumpano, revisão técnica: Antonio Pertence Junior. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.