MODELAGEM E RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM

<u>HELING, Gabriela Iven</u>[1]; PRANKE, Amanda[2]; ROCHA, Kátia Martins[3].

Discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas-UFPel;
[1]gabryelaih@hotmail.com; [2]amandapranke@ymail.com; [3]kmartinsrocha@bol.com.br

SIMCH, Márcia Rosales Ribeiro

Docente do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas;

marciasimch@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho pretendemos comparar graficamente as soluções numéricas, obtidas pelo método de Euler e o Método de Euler Modificado, com a solução analítica de uma equação diferencial ordinária (EDO) que representa o movimento em queda livre de um pára-quedista, obtida a partir da 2ª Lei de Newton.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Consideremos um pára-quedista de massa $m = 58\ kg$ e o coeficiente de atrito entre o ar e o pára-quedas $k = 5\ kg/s$. Seja $t = 0\ s$, o instante em que o pára-quedas é aberto. Conforme a 2ª Lei de Newton, $\sum_i F_i = ma$, a equação diferencial linear que rege tal movimento e dada por

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{k}{m}v(t), \qquad (1)$$

onde g é aceleração gravitacional.

Utilizando os dados fornecidos pelo problema, temos:

$$\frac{dv(t)}{dt} = 9{,}8 - \frac{5}{58}v(t). \qquad (2)$$

A seguir, apresentaremos a solução analítica e soluções numéricas.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A equação diferencial ordinária expressa em (2) possui solução fechada. Isto permitirá avaliar o desempenho do método numérico proposto, quanto à convergência da solução aproximada para a solução exata.

3.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A equação que descreve esse problema é uma equação diferencial de 1ª ordem, com solução analítica obtida por separação de variáveis:

$$v(t) = \frac{2842}{25} + Ce^{-\frac{5t}{58}}, \tag{3}$$

onde algumas das soluções particulares, para velocidades iniciais diferentes, estão descritas no gráfico abaixo.

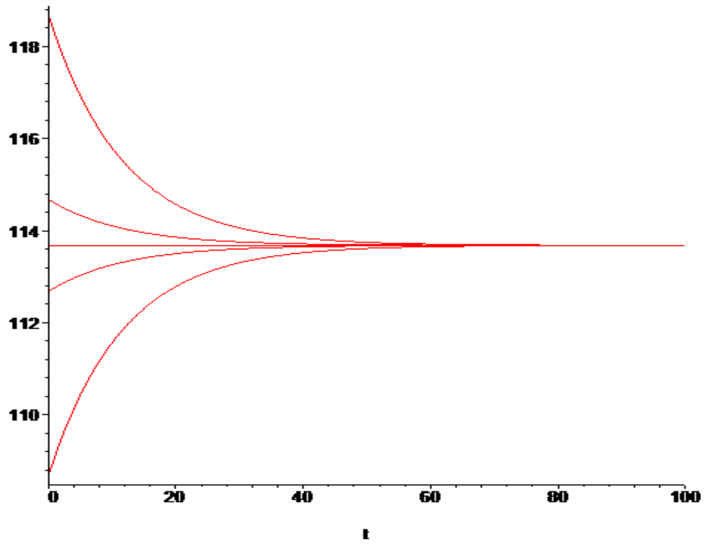


Gráfico 1

Observamos que, independentemente da velocidade inicial, a velocidade atingida pelo pára-quedista ao longo do tempo ficará próxima de $\frac{2842}{25} = 113{,}68\ m/s$; essa velocidade denomina-se *velocidade limite*.

3.2 SOLUÇÕES NUMÉRICAS PELOS MÉTODOS DE EULER SIMPLES E EULER MODIFICADO

O método de Euler Simples consiste numa expansão em Série de Taylor (truncada em primeira ordem) da variável incógnita para obter soluções aproximadas de uma EDO, ou seja, se torna uma aproximação linear para a solução.

No exemplo em questão, pela expansão em Série de Taylor, temos:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{dv(t)}{dt}\Delta t + \cdots \tag{4}$$

Então, as soluções aproximadas obtidas pelo método de Euler Simples serão dadas por:

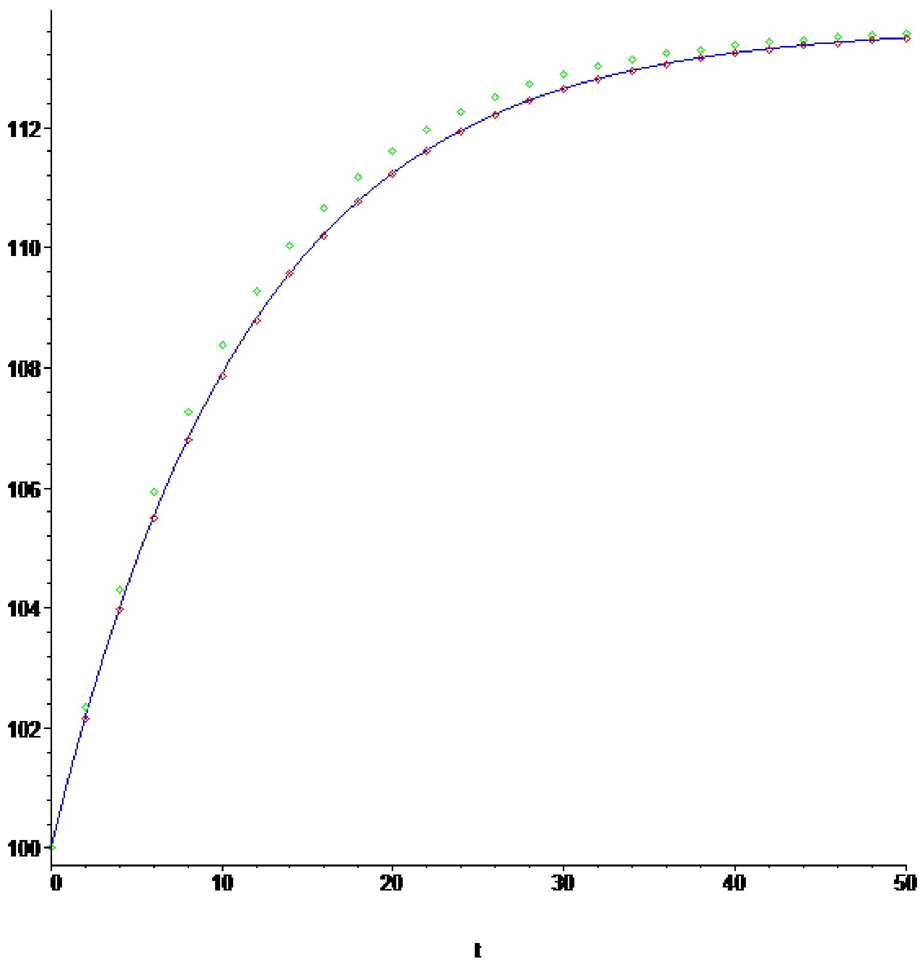
$$v(t+\Delta t) \cong v(t) + \left(9{,}8 - \tfrac{5}{58}v(t)\right)\Delta t. \tag{5}$$

Se utilizarmos o método de Euler Modificado, o qual usa a média aritmética das derivadas de dois pontos subseqüentes, para o mesmo exemplo, temos tal solução:

$$v(t+\ \Delta t) \cong v(t) + \frac{\Delta t}{2}\left[\frac{dv(t)}{dt} + \frac{dv(t+1)}{dt}\right]. \tag{6}$$

Considerando $t_0 = 0\ s,\ \ \Delta t = 2\ s$ e supondo $v_0 = v(o) = 100\ m/s$ nesse instante, o

Gráfico 2 mostra uma comparação entre a solução analítica e soluções obtidas através dos dois métodos numéricos analisados anteriormente.



_______ Solução Analítica
- - - - - - Método de Euler Simples
- - - - - Método de Euler Modificado

Gráfico 2

4. CONCLUSÕES

A partir da análise dos gráficos podemos constatar que o método de Euler modificado tem melhor convergência que o método de Euler Simples. Uma questão importante a ser destacada é que o método de Euler é do tipo explícito, fazendo com que a convergência da solução dependa fortemente do tamanho do Δt; quanto ao método de Euler modificado, ele faz parte dos métodos denominados *semi-implícitos*, e a convergência não depende do tamanho do Δt, mas pode acontecer pouca ou nenhuma exatidão quando utilizado Δt muito grande.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. ***Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno****.* Tradução de Valéria de Magalhães Iorio; 8ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BRONSON, Richard. ***Moderna Introdução as Equações Diferenciais****.* Tradução de Alfredo Alves de Farias, revisão técnica Roberto Romano. São Paulo, McGraw-Hill, 1977.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. ***Equações Diferenciais Aplicadas****.* Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1997.

SIMCH, Márcia Rosales Ribeiro; SUAZO, Gérman Ramón Canahualpa; PINTO, Silvia Prietsch. - ***Cálculo D****.* Pelotas: Editora Universitária/ UFPEL, Ministério da Educação, 2009.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. ***Equações Diferenciais****.* V.1. Tradução Antonio Zumpano, revisão técnica: Antonio Pertence Junior. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

BURDEN, R.L. & FAIRES, J.D. ***Análise Numérica****. 5 ed*. Pioneira Thomson Learning. 2003.

RUGGIERO**,** M. A. G. & LOPES, V. L. R. ***Cálculo numérico***: ***aspectos teóricos e computacionais***. 2.ed. São Paulo, Makron, 1997.

BARROSO, Leônidas Conceição; BARROSO, Magali Maria de Araújo; CAMPOS, Filho Frederico Ferreira; CARVALHO, Márcio Luiz Bunte; MAIA, Miriam Lourenço. **Cálculo Numérico (com aplicações).** São Paulo: Harbra Ltda, 1987.